

puis on conclura des formules (15), (16) que la condition de convergence du développement dont la somme est z , se réduit à la formule

$$(18) \quad \text{mod } 2(ht + s) < 1,$$

la valeur de s étant fournie par l'équation (17) et choisie de manière que le module de la somme $ht + s$ surpasse, s'il ne l'égale pas, le module de la différence $ht - s$. Donc, en définitive, l'équation (13) subsistera, tant que les valeurs attribuées aux paramètres h et l seront renfermées entre les limites que leur assigne le système des conditions (10) et (18). Ainsi se trouve résolue, par un calcul direct, et sans qu'il soit nécessaire de recourir aux théorèmes généraux sur la convergence des séries, la question posée par M. Ménabréa, dans le Mémoire cité [page 24]. Ajoutons que cette solution fait disparaître les difficultés et les objections auxquelles diverses applications de ces théorèmes semblaient donner lieu. »

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

ASTRONOMIE. — *Troisième Mémoire sur les étoiles doubles;*
par M. YVON VILLARCEAU. (Extrait par l'auteur.)

(Commissaires, MM. Mathieu, Liouville, Le Verrier.)

Méthode pour le calcul des orbites des étoiles doubles, déduite de considérations géométriques.

« Dès le 6 décembre 1847, pour prendre date, j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie un exposé succinct des formules dont j'ai fait usage pour calculer les orbites des étoiles doubles η de la Couronne et γ de la Vierge.

» Ce premier travail, ayant été simplement déposé et non publié, n'avait pu être connu de sir John Herschel, lorsqu'il a présenté, plus tard, une solution du même problème. Dans la séance du 26 mars 1849, M. Le Verrier a communiqué une Lettre de l'illustre astronome anglais, de laquelle j'extraits ces lignes : « Comme il n'est pas tout à fait impossible que » M. Villarceau et moi soyons tombés sur la même idée, je pense qu'il » sera bon, pendant que je n'ai point encore connaissance de son travail, » de mentionner succinctement le principe de ma nouvelle méthode. » La lecture de la fin de cette communication m'a appris qu'effectivement la méthode de sir John Herschel et la mienne reposent sur la même idée. Cette idée consiste à faire usage des coordonnées rectangulaires apparentes de

l'étoile satellite, abstraction faite du temps, pour déterminer les cinq coefficients de l'équation de la trajectoire apparente.

» Je me suis empressé de faire connaître à sir John Herschel l'ensemble de mes formules et quelques-uns des résultats qu'elles m'avaient permis d'obtenir. A cette occasion, je reçus de sir John Herschel une Lettre dont l'Académie voudra bien me permettre de lui communiquer le passage suivant : « Quoiqu'il y ait ressemblance, quant au principe général, entre » votre méthode et celle que j'indiquai à M. Le Verrier, et dont les détails » et formules sont expliqués dans un Mémoire lu à la Société astronomique, le même soir (13 avril 1849), il y a néanmoins assez de diversité » dans les procédés recommandés, pour faire regarder les deux méthodes » comme essentiellement différentes. »

» Plusieurs circonstances ont retardé jusqu'ici la présentation du Mémoire destiné à faire connaître avec plus de détails la méthode que j'ai imaginée d'abord pour le calcul des orbites des étoiles doubles ; je suis heureux de pouvoir la livrer aujourd'hui au jugement de l'Académie.

» Malgré la grande précision des mesures micrométriques obtenues depuis l'installation des grands instruments parallactiques, il n'est pas encore possible cependant d'appliquer utilement aux observations les méthodes proposées par Savary d'abord et par M. Encke ensuite. Quoique les observations modernes embrassent une période d'environ trente ans, on n'en peut pas choisir quatre complètes, assez distinctes pour se prêter à l'application de ces méthodes. Pour remédier à cet inconvénient et atténuer l'effet des erreurs des observations, j'ai dû chercher d'autres méthodes qui permissent d'employer un grand nombre d'observations, et aussi de tirer parti des anciennes mesures faites par W. Herschel, de 1780 à 1804. (Deux de ces méthodes ont été publiées dans les *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1852.)

» La principale difficulté que l'on rencontre en recherchant un système de formules propres à la détermination des orbites, est dans les relations compliquées qui lient les coordonnées au temps. Dans le cas des étoiles doubles, on peut éviter cette difficulté en employant des données en nombre plus que suffisant, ou même se contenter de la réduire notablement, si l'on ne veut employer que quatre observations complètes. Remarquons, en effet, que l'orbite vraie étant supposée être une courbe du deuxième degré, sa projection sur un plan perpendiculaire au rayon visuel est aussi une section conique. Les coordonnées observées doivent dès lors satisfaire à l'équation générale des courbes du deuxième degré. Le temps n'entre pas

dans cette équation ni explicitement, ni implicitement. Si donc on pouvait employer les coordonnées de cinq points au moins de l'orbite apparente, on aurait aisément les cinq coefficients de l'équation de cette orbite. Il serait facile ensuite de remonter aux éléments de la trajectoire vraie. En effet, il vient d'être dit que la première est la projection de la seconde; et, comme on suppose que le mouvement dans l'orbite vraie est dû à une force qui agit en raison inverse du carré de la distance, l'étoile centrale doit occuper un des foyers de l'orbite vraie. Or il est encore aisé de déterminer la situation d'un plan passant par l'étoile centrale et qui coupe la surface cylindrique élevée perpendiculairement sur l'orbite apparente, de manière que le foyer de la courbe d'intersection coïncide avec l'étoile centrale elle-même. Ce problème étant résolu, cinq des éléments de l'orbite vraie se trouvent déterminés; ce sont : le demi-grand axe, l'excentricité, la longitude du nœud, l'inclinaison et la distance du périhélie au nœud. Il ne reste plus que deux éléments à calculer : l'anomalie moyenne de l'époque et le moyen mouvement; deux angles de position et les temps correspondants suffisent, à la rigueur, pour fixer ces éléments. Le problème, envisagé sous le point de vue théorique, est, comme on le voit, d'une très-grande simplicité.

» Avant d'aborder le problème de la détermination des orbites des étoiles doubles, tel qu'il se présente en réalité aux astronomes, il est indispensable de dire quelques mots d'un autre problème théorique, qui consiste à obtenir les éléments, en employant quatre observations complètes. Faisons observer que les éléments étant au nombre de sept, tandis qu'on a huit données, on doit s'attendre à rencontrer une équation de condition entre les données.

» Les quatre couples de coordonnées fournissent quatre équations seulement entre les cinq coefficients de l'équation de l'orbite apparente; l'un de ces coefficients reste indéterminé, et les quatre autres s'obtiennent en fonctions de celui-ci. Voici maintenant comment le principe de la proportionnalité des aires aux temps permet de fixer la valeur du coefficient indéterminé, par voie de tâtonnements. En partant d'une valeur arbitraire attribuée à cette inconnue dont nous fixons d'ailleurs les limites, on calculerait, au moyen de formules qui sont données dans ce Mémoire, les aires des trois secteurs compris entre les quatre rayons vecteurs projetés; les rapports de ces aires aux temps correspondants, donneraient trois valeurs généralement différentes de la constante des aires. En faisant varier l'indéterminée jusqu'à ce que les valeurs de la constante des aires four-

nies par deux seulement des trois secteurs devinssent égales, on obtiendrait la valeur de cette constante. Mais les données doivent, en outre, satisfaire à la condition que la constante des aires fournie par le troisième secteur s'accorde avec la valeur commune déduite des deux autres. En d'autres termes, les équations qui expriment la proportionnalité des aires aux temps entre les trois secteurs étant au nombre de deux, si l'on élimine de ces équations l'indéterminée qu'elles renferment, on aura, entre les données, l'équation de condition dont il a été parlé tout à l'heure. Dans le cas où elle serait satisfaite, on aurait une preuve que l'hypothèse admise sur la loi du mouvement est conforme au résultat fourni par les observations.

» Les coefficients de l'équation de l'ellipse apparente étant alors connus, on pourrait achever les calculs comme il a été dit plus haut; mais le moyen mouvement s'obtiendra directement en appliquant le principe de la proportionnalité des aires à la surface entière de l'ellipse projetée. Un angle unique de position, en remontant à la position réelle, donnerait ensuite la longitude moyenne de l'époque.

» En attendant que les observations modernes soient devenues assez nombreuses et distinctes pour équivaloir à cinq positions complètes, nous sommes obligés de rattacher aux considérations théoriques qui viennent d'être exposées, la solution du problème pratique que nous nous sommes proposé. Nous employons toutes les observations complètes qui nous paraissent jouir d'une suffisante précision. (Ces observations ne remontent pas au delà de l'époque de l'installation de la lunette de Dorpat.) Le nombre des équations qui en résulte étant de beaucoup supérieur à cinq, nous indiquons divers procédés pour en tirer les inconnues, et entre autres, un mode de combinaison des équations qui satisfait à la condition que la somme des carrés des distances normales entre les points observés et la courbe cherchée soit un minimum. Or, quelque procédé de résolution des équations que l'on emploie aujourd'hui, il restera au moins une indéterminée, et nous supposons ici qu'il n'en reste qu'une seule. Nous rentrons ainsi dans le problème théorique qui vient d'être examiné. Seulement, il arrive que les observations modernes étant généralement rapprochées, les secteurs qu'elles déterminent varient extrêmement peu, lorsque l'on attribue des valeurs variables à l'indéterminée. Ces observations suffisent ainsi pour donner la valeur de la constante des aires avec assez d'approximation. Les aires des secteurs limités par les observations isolées de W. Herschel, varieront, au contraire, avec l'indéterminée, et un seul angle de position mesuré

par cet astronome suffira pour fixer la valeur de l'inconnue, par la condition que la constante des aires que l'on tire de cette observation, comparée à une position connue, s'identifie avec la constante que donnent les observations modernes.

» Nous ne pouvons entrer ici dans tous les détails indispensables au succès des applications de notre méthode; nous nous sommes borné à en exposer le principe.

» Le Mémoire est accompagné d'une Note dans laquelle sont données les corrections qu'il faut ajouter aux positions calculées sans avoir égard au mouvement propre des étoiles doubles, pour tenir compte de l'effet de ce mouvement. Les termes correctifs peuvent acquérir des valeurs très-sensibles au bout d'un petit nombre de siècles dans les systèmes animés de mouvements propres considérables, et nous fournir un moyen de distinguer, entre les deux positions symétriques du plan de l'orbite, celle qui est la véritable. Dans certaines hypothèses très-acceptables, la question serait résolue d'ici à trois siècles environ pour la 61^e du Cygne. »

ASTRONOMIE. — *Théorie analytique de l'inégalité de lumière des étoiles doubles*; par M. YVON VILLARCEAU.

(Commissaires, MM. Mathieu, Liouville, Le Verrier.)

« Dans son beau Mémoire sur les étoiles doubles, Savary, envisageant la différence des temps que met la lumière à nous arriver des deux étoiles composantes, à raison de leur inégale distance à notre système solaire, conclut à l'existence d'une inégalité dans le mouvement relatif apparent des étoiles doubles, et indique la possibilité d'en déduire une limite inférieure de leur parallaxe. « En effet, dit-il, si la lumière employait à traverser l'orbite d'une étoile double un temps égal à celui que l'étoile met à se déplacer d'un angle mesurable, on verrait cette étoile d'autant plus en arrière de sa position réelle relativement à l'étoile considérée comme centre des mouvements, qu'elle serait, dans une partie de son orbite, plus éloignée de nous..... »

» M. Arago a développé l'idée de Savary dans une des intéressantes Notices dont il enrichit l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, et attiré ainsi l'attention des astronomes sur ce point délicat de la physique céleste. Quelques années plus tard, M. Struve, dans son grand ouvrage sur les étoiles doubles, s'est occupé de rechercher jusqu'à quel point l'inégalité indiquée par Savary, et qu'il appelle *équation de lumière*, pourrait devenir sensible.

» Aucune théorie mathématique de l'équation ou inégalité de lumière n'avait été exposée, lorsque M. Houzeau, qui croyait apercevoir des anomalies considérables dans les mesures de distance de l'étoile γ p d'Ophiuchus, fut tenté de les attribuer à l'aberration relative provenant du mouvement propre de cette étoile. (J'ai fait voir, dans ma cinquième Note sur les étoiles doubles, *Comptes rendus*, tome XXXII, page 50, que les mesures de distance de l'étoile p d'Ophiuchus ne présentent aucune anomalie qui ne soit imputable aux erreurs des observations.) La tentative de M. Houzeau fut combattue par sir John Herschel; et ce fut, pour le célèbre astronome, l'occasion de mettre en évidence deux des inégalités de lumière qui affectent les mouvements apparents des étoiles doubles. L'une de ces inégalités produit un changement dans la longitude moyenne de l'époque, et ne dépend que de la distance du système au Soleil; l'autre produit dans le moyen mouvement ou la durée de la révolution une altération qui dépend de la vitesse avec laquelle le système binaire s'approche ou s'éloigne de nous. Mais sir John Herschel conteste l'influence que M. Houzeau attribue au mouvement propre, et il se borne d'ailleurs à tenir compte de l'inégalité de Savary, inégalité qu'il détermine sans avoir égard à cette circonstance, que ce n'est pas l'étoile centrale qui se meut en ligne droite et d'un mouvement uniforme, mais bien le centre de gravité des deux étoiles. Cette remarque ne lui avait cependant pas échappé, mais il n'en a pas tenu compte dans son analyse.

» L'étude faite par les deux astronomes que je viens de citer, des altérations du mouvement relatif des étoiles doubles, produites par l'inégalité de lumière, étant, à quelques égards, insuffisante, il m'a paru indispensable de reprendre cette question, pour compléter la théorie du mouvement des étoiles doubles. En faisant l'application de la méthode analytique, à ce sujet de recherches, je suis parvenu à des résultats qu'il était difficile de soupçonner à priori et que je vais exposer dans ce Mémoire.

» Le principe fondamental auquel se rattache la théorie de l'inégalité de lumière est que : le lieu apparent actuel d'un corps céleste est celui qu'il occupait à une époque antérieure à l'époque actuelle, d'une quantité égale au temps que la lumière a employé pour franchir l'espace qui nous sépare de l'astre considéré. C'est sous cette forme que l'on énonce le plus souvent le principe de l'aberration. Dans les applications ordinaires de ce principe, le lieu apparent et le lieu réel sont définis au moyen de coordonnées angulaires rapportées à des plans ou axes de directions fixes; le même principe subsiste encore lorsque les lieux sont définis par des coordonnées linéaires;

nous employons ces dernières, qui s'adaptent très-facilement au problème que nous avons en vue.

» Les résultats auxquels nous sommes parvenu doivent être considérés comme des déductions nécessaires du principe qui vient d'être énoncé; en sorte que si ce principe venait plus tard à être modifié, il y aurait lieu d'examiner comment devraient être modifiées les déductions que nous allons exposer.

Résumé des propositions auxquelles conduit la théorie de l'inégalité de lumière.

» *Remarques préliminaires.* — Le déplacement d'une étoile, relativement à notre Soleil, résulte à la fois du changement de la distance linéaire de l'étoile au Soleil, et de la variation des coordonnées angulaires de l'étoile rapportées à un même plan fixe et à une même origine fixe prise dans ce plan. Le changement de la distance au Soleil a pour premier effet d'altérer les angles sous lesquels nous voyons la projection de la distance des composantes d'une étoile double. Cet effet, purement optique, est tout entier compris dans la variation du grand axe de l'orbite; il peut nous faire connaître, avec le temps, la variation de la distance qui nous sépare du système binaire, avec plus de précision qu'on n'en obtiendrait en recherchant la variation de la parallaxe.

» Voici maintenant les effets que produit l'aberration relative des deux composantes, ou *l'inégalité de lumière*.

» 1°. L'aberration produit, à raison de la simple distance linéaire de l'étoile au Soleil, une altération dans la longitude moyenne à une époque donnée. Nous déduisons des observations, au lieu de cette longitude, celle qui avait lieu dans l'orbite réelle à une époque antérieure distante de l'époque donnée, d'une quantité égale au temps que la lumière a mis à franchir la distance qui nous séparait du système binaire au moment du départ du rayon lumineux qui nous est arrivé à l'époque de la longitude moyenne.

» 2°. L'aberration détermine, à raison de la vitesse avec laquelle l'étoile se rapproche ou s'éloigne du Soleil, une inégalité qui affecte le moyen mouvement. Le moyen mouvement apparent excède le moyen mouvement vrai lorsque le système binaire se rapproche de nous; il est moindre dans le cas contraire. La durée de la révolution subit les changements inverses.

» Les altérations que subissent la longitude moyenne de l'époque et le moyen mouvement avaient déjà été signalées par d'autres astronomes, et notamment par sir John Herschel.

» 3°. Le déplacement angulaire et commun des deux étoiles composantes, que les astronomes appellent *mouvement propre*, combiné avec l'aberration, donne naissance à une inégalité que M. Houzeau avait entrevue et que sir John Herschel a contestée. Il résulte de mes recherches que cette inégalité a pour effet de déplacer le satellite relativement à l'étoile centrale, d'une quantité égale au chemin que parcourrait le satellite avec la vitesse du mouvement propre, mais dans le sens opposé à ce mouvement, pendant le temps que met la lumière à franchir la distance au delà du plan perpendiculaire au rayon visuel et passant par l'étoile centrale, à laquelle le satellite *paraît* être de ce plan. Nous disons *paraît* être, pour indiquer que la distance dont il s'agit est celle que donnent les éléments apparents à l'instant considéré.

» Ce dernier effet se confond entièrement avec le mouvement elliptique apparent dont les éléments se trouvent seulement altérés par cette inégalité, sans qu'il soit possible de les distinguer des éléments de l'orbite vraie, tant que la parallaxe reste inconnue.

» Les éléments qui se trouvent ainsi modifiés par le mouvement propre sont au nombre de trois : la longitude du périhélie, la longitude du nœud et l'inclinaison. Il va sans dire que ces modifications sont nulles, lorsque le plan de l'orbite est perpendiculaire au rayon visuel. Le changement que subit l'inclinaison mérite de fixer l'attention un instant. Ce changement, qui s'annule avec l'inclinaison, augmente progressivement lorsque celle-ci croît, et jusqu'à ce qu'elle atteigne un ordre de grandeur de beaucoup supérieur au coefficient numérique de l'inégalité en question ; il suffit pour cela que l'inclinaison dépasse quelques dizaines de secondes. Au delà, l'inégalité qui affecte l'inclinaison devient indépendante de cet élément et ne dépend plus que de la distance angulaire comprise entre la direction du mouvement propre et la ligne des nœuds ; elle est alors proportionnelle au sinus de cet angle, en sorte qu'elle atteint son maximum lorsque la direction du mouvement propre est perpendiculaire à la ligne des nœuds.

» Tous les effets de l'aberration que nous avons indiqués jusqu'ici, se trouvent ainsi représentés par le mouvement elliptique dont les éléments, à l'exception de deux, le grand axe et l'excentricité, sont altérés à raison de la distance au Soleil, de la vitesse avec laquelle varie cette distance et du mouvement propre. Les inégalités produites dans les éléments n'offrent qu'un intérêt purement spéculatif.

» 4°. L'aberration produit un dernier effet dépendant du rapport des

masses des étoiles composantes, et qui consiste à nous faire voir le satellite sur son orbite au point qu'il y occupait à une époque antérieure, distante de l'époque actuelle d'une quantité égale au temps de l'aberration relative du satellite, multiplié par le rapport de l'excès de la masse centrale sur celle du satellite à la somme de ces deux masses. Cette inégalité ne se confond pas avec le mouvement elliptique : c'est donc le seul effet de l'aberration que les observations puissent nous déceler; encore faut-il faire remarquer qu'il s'annule dans les systèmes où les composantes ont des masses égales. Personne jusqu'ici n'avait indiqué le rôle que joue le rapport des masses dans l'aberration relative des étoiles doubles, et l'on croyait qu'il suffisait d'une forte inclinaison de l'orbite pour donner naissance à ce phénomène; on voit qu'il faut encore que les masses soient inégales.

» L'introduction de l'inégalité dépendante du rapport des masses, dans les équations de condition, permettrait d'obtenir une inconnue renfermant ce rapport associé à la parallaxe, si cette inégalité pouvait acquérir une valeur sensible. On en déduirait la parallaxe si le rapport des masses était connu. Or, comme ce rapport est entièrement inconnu, on voit que l'inégalité de lumière ne peut même pas servir à fixer une limite inférieure de la parallaxe (1). »

MÉTÉOROLOGIE. — *Recherches sur la composition chimique des eaux de pluie recueillies dans l'hiver de 1851-1852, à l'observatoire de Lyon.*
(Note de M. BINEAU.)

[Renvoi à la Commission chargée de l'examen du Mémoire de M. Barral sur la même question, Commission qui se compose de MM. Arago, Dumas, Boussingault, de Gasparin, Regnault (2)].

« La communication de M. Barral au sujet des eaux pluviales recueillies à l'Observatoire de Paris, me détermine à signaler à l'Académie des recherches analogues entreprises à Lyon. Elles datent seulement de la fin de novembre dernier, époque où notre Commission hydrométrique fut adjointe à l'observatoire de la ville réorganisé par les soins éclairés de notre maire,

(1) La détermination du rapport des masses des composantes des étoiles doubles fera l'objet d'une autre communication.

(2) C'est par erreur que dans le dernier *Compte rendu*, page 336, ligne 9, le nom de M. Babinet avait été écrit au lieu du nom de M. Regnault, comme faisant partie de la Commission chargée de l'examen du Mémoire de M. Barral.